Cyklické křivky

Zpracováno podle textu: *Jarešová, M. – Volf, I.: Matematika křivek*

Celý text je možno stáhnout ze stránek Fyzikální olympiády: *http://fo.cuni.cz*.

Mezi cyklické pohyby patří *cykloidální, epicykloidální, hypocykloidální* a *evolventní pohyby*.

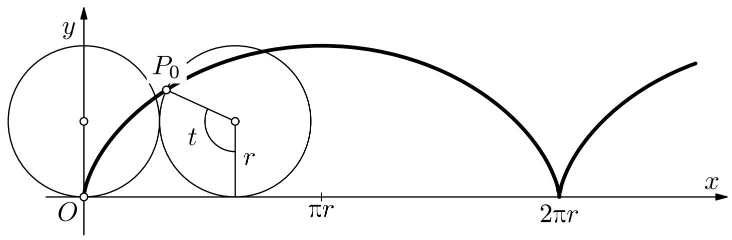
Cykloidální pohyb vzniká valením kružnice po přímce. Trajektoriím cykloidálního pohybu říkáme *cykloidy*.

Cykloida je rovinná křivka, kterou opisuje bod pevně spojený s pohybující se kružnicí, která se valí po přímce. Je-li tento bod na valící se kružnici, vznikne valením *prostá cykloida*. Je-li vzdálenost bodu od středu valící se kružnice větší než její poloměr, opisuje tento bod *cykloidu prodlouženou*. Nakonec je-li vzdálenost bodu od středu valící se kružnice menší než její poloměr, opisuje tento bod *cykloidu zkrácenou*.

Cykloidy

Prostá cykloida

Bod kružnice, která se bez skluzu kotálí po přímce, opisuje *prostou* cykloidu.



Obr. 1 Prostá cykloida

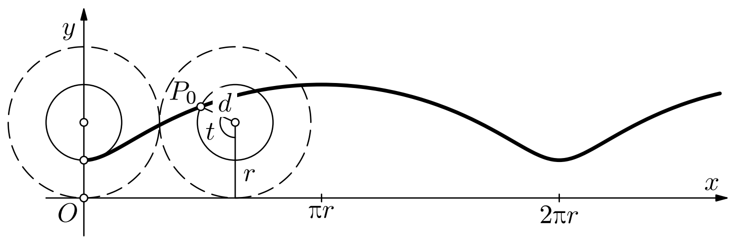
Parametrické rovnice prosté cykloidy ($t \in R$) jsou dány vztahy

$$x = r(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t),$$

kde r je poloměr kružnice, t je velikost úhlu odvalení.

Zkrácená cykloida

Zkrácená cykloida vznikne, jestliže tvořící bod pevně spojený s kotálející se (hybnou) kružnicí leží ve *vnitřní* oblasti této kružnice ve vzdálenosti d ($d < r$) od středu kružnice o poloměru r.



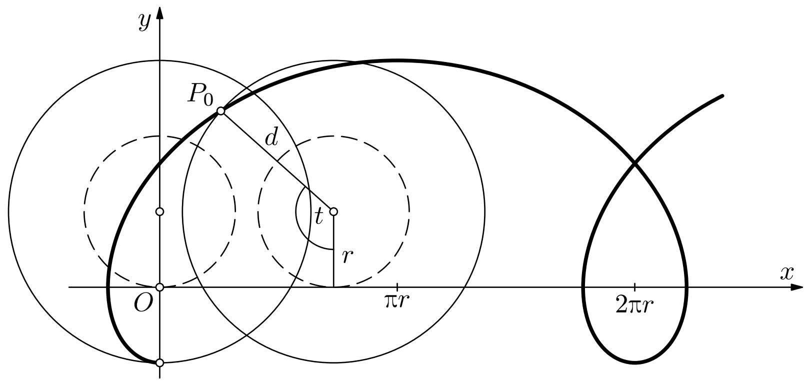
Obr. 2 Zkrácená cykloida

Parametrické rovnice zkrácené cykloidy jsou ($t \in R$)

$$x = rt - d\sin t, \quad y = r - d\cos t.$$

Prodloužená cykloida

Prodloužená cykloida vznikne, jestliže tvořící bod pevně spojený s kotálející se (hybnou) kružnicí leží ve *vnější* oblasti této kružnice ve vzdálenosti d ($d > r$) od středu kružnice o poloměru r.



Obr. 3 Prodloužená cykloida

Parametrické rovnice prodloužené cykloidy jsou opět jako v případě zkrácené cykloidy ($t \in R$)

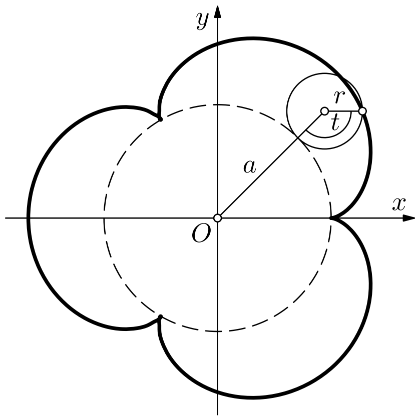
$$x = rt - d\sin t, \quad y = r - d\cos t.$$

Epicykloidy a hypocykloidy

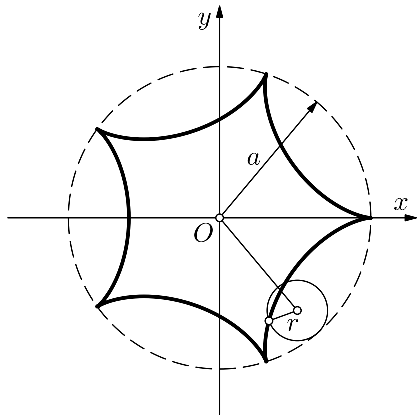
Parametrické rovnice epicykloidy a hypocykloidy

Prostá epicykloida a hypocykloida

Epicykloida (hypocykloida) vzniká odvalováním pohyblivé kružnice o poloměru r vně (uvnitř) pevné kružnice o poloměru a.



Obr. 4 Epicykloida



Obr. 5 Hypocykloida

Obě křivky lze vyjádřit také parametricky, a to epicykloidu rovnicemi

$$x = (a+r)\cos t - r\cos\left(\frac{a+r}{r}t\right), \quad y = (a+r)\sin t - r\sin\left(\frac{a+r}{r}t\right),$$

hypocykloidu pak rovnicemi

$$x = (a-r)\cos t + r\cos\left(\frac{a-r}{r}t\right), \quad y = (a-r)\sin t - r\sin\left(\frac{a-r}{r}t\right).$$

Je-li poměr $\dfrac{a}{r} = m$ celé číslo, pak prostá epicykloida (hypocykloida) je uzavřena křivkou s m větvemi, které vzniknou při jednom oběhu hybné kružnice kolem nehybné kružnice.

Je-li poměr $\dfrac{a}{r} = \dfrac{p}{q} = m$ racionálním číslem v základním tvaru $\dfrac{p}{q}$, pak prostá epicykloida (hypocykloida) je uzavřena křivkou s p větvemi, které vzniknou při q obězích hybné kružnice kolem nehybné kružnice.

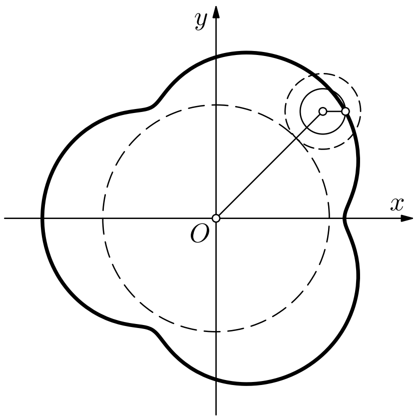
Je-li poměr $\dfrac{a}{r} = m$ iracionálním číslem, pak prostá epicykloida (hypocykloida) není uzavřenou křivkou a obsahuje nekonečně mnoho větví.

Zkrácená a prodloužená epicykloida

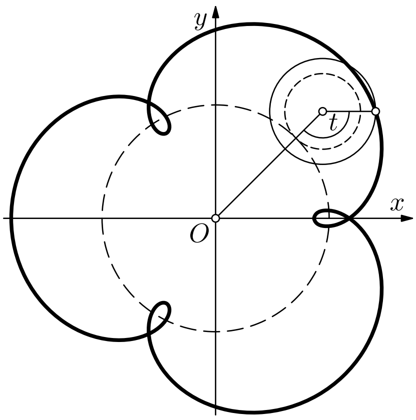
Parametrické rovnice zkrácené a prodloužené epicykloidy jsou dány vztahy

$$x = (a + r)\cos t - d\cos\left(\frac{a + r}{r}t\right), \quad y = (a + r)\sin t - d\sin\left(\frac{a + r}{r}t\right),$$

kde r je poloměr čárkované pohyblivé (odvalující se kružnice), d je poloměr odvalující se kružnice, která je na obr. 35, 36 znázorněna plnou čarou, a je poloměr pevné (čárkované) kružnice. Je-li $d < r$, jedná se o epicykloidu zkrácenou, je-li $d > r$, jedná se o epicykloidu prodlouženou (viz obr. 6 a obr. 7).



Obr. 6 Zkrácená epicykloida



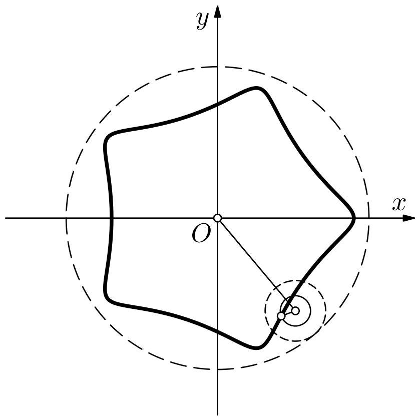
Obr. 7 Prodloužená epicykloida

Zkrácená a prodloužená hypocykloida

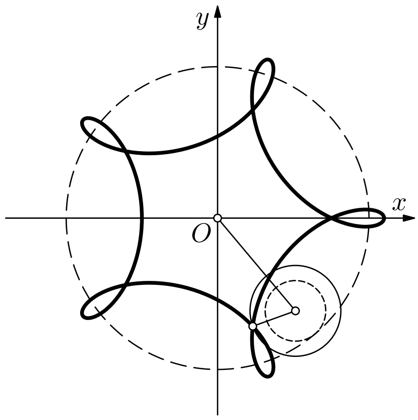
Parametrické rovnice zkrácené a prodloužené hypocykloidy jsou dány vztahy

$$x = (a - r)\cos t + d\cos\left(\frac{a - r}{r}t\right), \quad y = (a - r)\sin t - d\sin\left(\frac{a - r}{r}t\right),$$

kde r je poloměr čárkované pohyblivé (odvalující se kružnice), d je poloměr odvalující se kružnice, která je na obr. 8, 9 znázorněna plnou čarou, a je poloměr pevné (čárkované) kružnice. Je-li $d < r$, jedná se o hypocykloidu zkrácenou, je-li $d > r$, jedná se o hypocykloidu prodlouženou (viz obr. 8 a obr. 9).



Obr. 8 Zkrácená hypocykloida



Obr. 9 Prodloužená hypocykloida